



Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

<http://matem.emate.ucr.ac.cr/>
tel. (506) 2511-4528

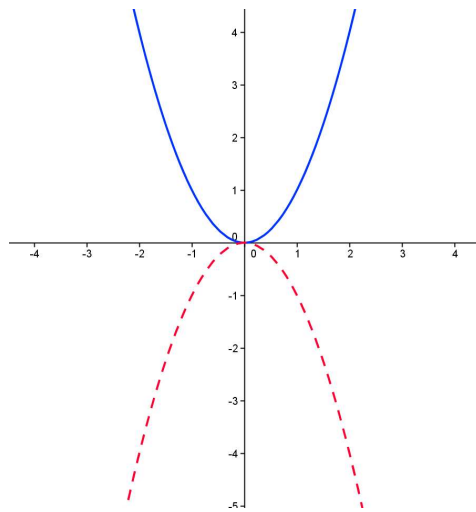


MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL -Décimo Año-

II EXAMEN PARCIAL 2011

Nombre: _____ código: _____

Colegio: _____



Fórmula

1

Sábado 18 de junio de 2011

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (37 puntos), la segunda es de análisis de gráfica (9 puntos) y la tercera es de desarrollo (11 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 37 puntos)

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. ¿Cuál de las siguientes relaciones corresponde a una función?

(A) $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $f(x) = -x^2$

(B) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(C) $f :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

(D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

2. Analice las siguientes relaciones:

$$f :]-10, 12] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{4 - 3x}$$

$$g : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{5}{x^3 - x}$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son funciones?

- (A) Sólo f
- (B) Sólo g
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

3. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función decreciente en el intervalo $[-3, 5]$, **NO** puede suceder que

- (A) $f(3) < f(-2)$
- (B) $f(-5) < f(2)$
- (C) $f(1) < f(6)$
- (D) $f(-3) < f(4)$

4. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{7\} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 10 - \frac{x+1}{x-7}$ y analice las siguientes proposiciones:

I. 1 es la preimagen de 10

II. La imagen de 0 es negativa

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

5. Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } -2 \leq x < 7 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

- (A) $g(0) = 0$
- (B) $g(-2) = 4$
- (C) $g(3) > g(-3)$
- (D) $g(2011) < 2011$

6. El dominio máximo de una función cuyo criterio es $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+3}}$ corresponde a

- (A) $[2, +\infty[$
- (B) $]2, +\infty[$
- (C) $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$
- (D) $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

7. El dominio máximo de una función cuyo criterio es $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$ corresponde a

- (A) $\mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$
- (B) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- (C) $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$
- (D) $\mathbb{R} - \{-2\}$

8. Si K es el dominio máximo de la función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, **con certeza** se cumple que

- (A) $\frac{1}{2} \in K$
- (B) $0 \in K$
- (C) $3 \notin K$
- (D) $-1 \notin K$

9. Considere las siguientes funciones:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5 + 2x$$

Entonces, $(f \circ g)(2)$ es igual a

- (A) 15
- (B) 23
- (C) 47
- (D) 159

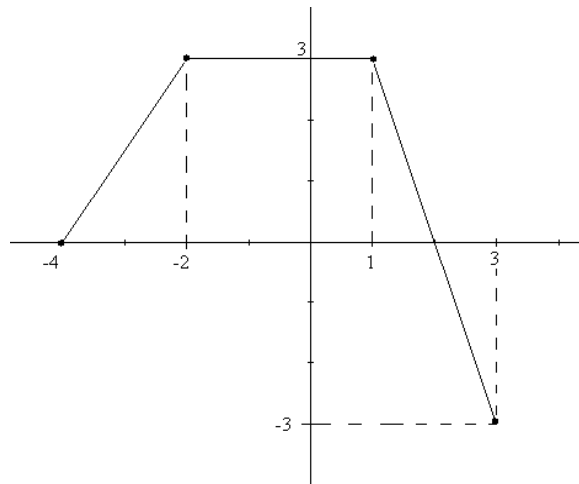
10. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo tales que $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 - 4$, entonces el dominio máximo de $(f \circ g)(x)$ corresponde a

- (A) \mathbb{R}
- (B) $\mathbb{R} - \{0\}$
- (C) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- (D) $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

11. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo tales que $(f \circ g)(x) = (2x - 1)^2$ y $f(x) = x^2$, entonces $g(x)$ es igual a

- (A) $(2x^2 - 1)^2$
- (B) $2x^2 - 1$
- (C) $2x - 1$
- (D) x

12. Considere la gráfica adjunta de la función f



De acuerdo con los datos de la gráfica, un intervalo donde f es creciente corresponde a

- (A) $[0, 3]$
- (B) $[1, 3]$
- (C) $[-3, 0]$
- (D) $[-4, 2]$

13. De las siguientes funciones, la que corresponde a una función **inyectiva** es

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$
- (B) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
- (C) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

14. Considere las siguientes funciones:

$$f : [-1, 3] \rightarrow [3, 12[, f(x) = 2x + 5$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \{3\}, g(x) = 3$$

¿Cuáles de las funciones anteriores son **sobreyectivas**?

- (A) Ambas
- (B) Sólo f
- (C) Sólo g
- (D) Ninguna

15. Considere la función $f : D \rightarrow [-4, +\infty[$, con $f(x) = x^2 - 4$. Para que f sea inyectiva D puede ser

- (A) $[-2, 2]$
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $] -\infty, 1]$
- (D) $[-4, +\infty[$

16. ¿Cuál de las siguientes funciones es **biyectiva**?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- (B) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, f(x) = |x|$
- (C) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1$
- (D) $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, f(x) = x^2 + 7$

17. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 5$, entonces $f^{-1}(1)$ es igual a

- (A) -1
- (B) $\frac{-1}{3}$
- (C) $\sqrt[3]{3}$
- (D) $\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

18. Si el criterio de una función biyectiva es $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, entonces el criterio de $f^{-1}(x)$ puede ser

- (A) $\frac{\sqrt{1-x}}{x}$
- (B) $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$
- (C) $\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$
- (D) $\sqrt{\frac{x-1}{x}}$

19. Si f es una función lineal tal que $f(2) = -3$ y $f^{-1}(-5) = -2$ entonces la pendiente de f es igual a

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{-1}{2}$
- (C) 2
- (D) -2

20. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función lineal tal que $f(-1) = 4$ y $f(3) = 7$ entonces

(A) $f(x) = \frac{3x + 19}{4}$

(B) $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

(C) $f(x) = \frac{-3x + 37}{4}$

(D) $f(x) = \frac{3x}{4} + 19$

21. Si $(2, -1)$, $(5, -22)$ y $(k, 20)$ pertenecen al gráfico de una función lineal, entonces el valor de k es igual a

(A) 1

(B) -1

(C) 127

(D) -127

22. Considere la función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Si el ámbito de f es $]-\infty, -2]$, entonces M es igual a

(A) $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$

(B) $\left]-\infty, \frac{5}{4}\right]$

(C) $[11, +\infty[$

(D) $]-\infty, 11[$

23. Un elemento del ámbito de la función $h :]-\infty, -4[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -4x + 3$ corresponde a

- (A) 19
- (B) 0
- (C) $\frac{7}{4}$
- (D) 23

24. Si $3y + 2x - 6 = 0$ y $-2y + kx + 1 = 0$ son las ecuaciones que definen dos rectas perpendiculares entonces k es igual a

- (A) 3
- (B) -3
- (C) $\frac{4}{3}$
- (D) $-\frac{4}{3}$

25. El punto de intersección de las rectas $2x - 3y = 1$ y $4x + 2 = 5y$, se ubica en el cuadrante

- (A) I
- (B) II
- (C) III
- (D) IV

26. La ecuación de la recta paralela a $3y - 4x + 5 = 0$ que contiene al punto $(-3, 2)$ es

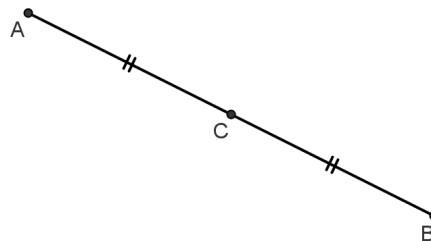
- (A) $3y - 4x = 18$
- (B) $-3y + 4x = 18$
- (C) $4y + 3x = -1$
- (D) $4y - 3x = 1$

27. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (-4 - 3b)x + 7$ es una función lineal creciente, un valor de b puede ser

- (A) 0
- (B) -1
- (C) -2
- (D) 1

28. Considere la siguiente figura donde se indican los puntos $A(-4, 2)$, $B(3, 0)$ y $C(n, m)$ entonces $n + m$ es igual a

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{-1}{2}$
- (C) 1
- (D) $\frac{3}{2}$



29. Si $(-4, 5)$ y $(-2, -3)$ son vértices no consecutivos de un cuadrado entonces el área de ese cuadrilátero es

- (A) 34
- (B) 68
- (C) $\sqrt{34}$
- (D) $\sqrt{68}$

30. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$. Si $(2, 5)$ es el vértice. Analice las siguientes proposiciones:

I. $f(0) < 0$

II. $f(12) = f(-8)$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son con certeza verdaderas?

- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

31. Considere la función $f:]-2, 5[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 10$ y analice las siguientes proposiciones

I. Si $x \in]-2, 2[$, entonces $f(x) \in]6, 10]$

II. El ámbito es $] -15, 6[$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son con certeza verdaderas?

- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 8x - 4x^2 + 3$ y utilícela para responder los ítems 32, 33 y 34

32. Si (m, n) es el vértice, entonces $m + n$ es igual a

- (A) 8
- (B) 6
- (C) -6
- (D) -8

33. Un intervalo donde f es decreciente es

- (A) $] -4, 4[$
- (B) $] 7, 12[$
- (C) $] -12, -7[$
- (D) $] -\infty, 1[$

34. Un elemento del ámbito es

- (A) $\frac{29}{4}$
- (B) 10
- (C) 5
- (D) 2011

35. Si x es la medida del lado de un cuadrado y A el área de dicho cuadrado, entonces el perímetro de dicho cuadrado en función de su área es igual a

- (A) $4\sqrt{A}$
- (B) $2\sqrt{A}$
- (C) $4A$
- (D) $4A^2$

36. En una tienda donde se venden calculadoras se ha encontrado que cuando las calculadoras se venden a un precio “ x ” dólares por unidad, el ingreso “ r ” como una función del precio está dado por $r(x) = -750x^2 + 15000x$. ¿Cuál debe ser el precio unitario en dólares para que el ingreso sea máximo?

- (A) 5
- (B) 10
- (C) 20
- (D) 80

37. Un comerciante aprendió por experiencia que si cobra x dólares por cada carro de juguete, puede vender $300 - 100x$ carritos. Si cada carrito le cuesta \$2, ¿cuál es la ganancia máxima en dólares que puede obtener?

- (A) 2,5
- (B) 20
- (C) 25
- (D) 50

Fin de la primera parte



Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

<http://matem.emate.ucr.ac.cr/>
tel. (506) 2511-4528

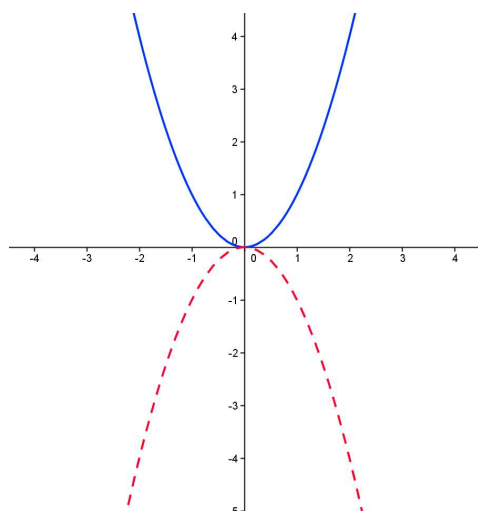


SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 18 de junio

Nombre completo: _____ CÓDIGO: _____

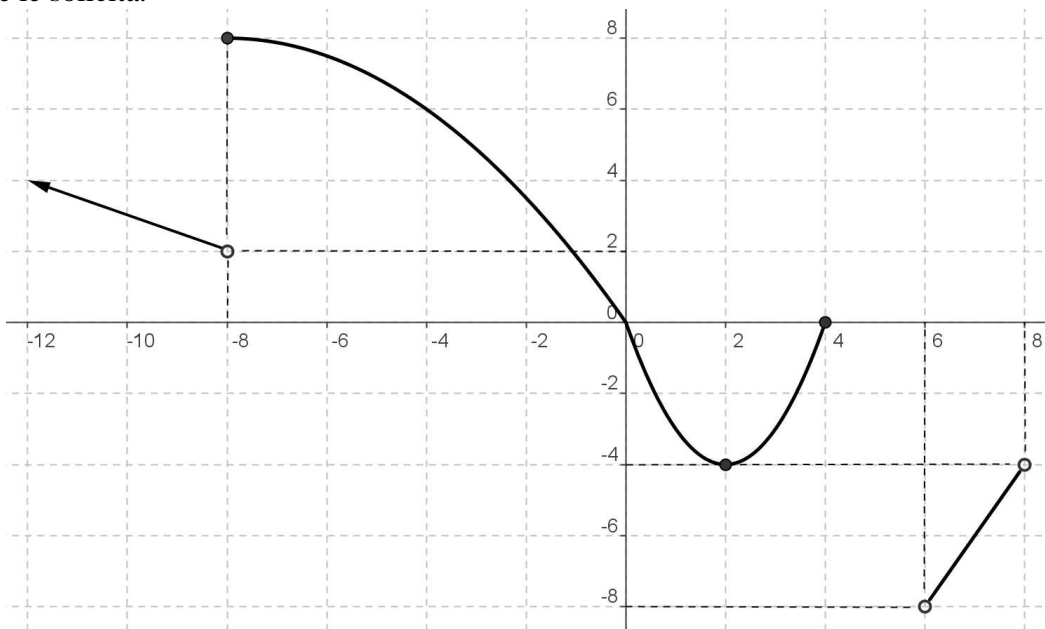
COLEGIO: _____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
AG	
D1	
D2	
TOTAL	



SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 9 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



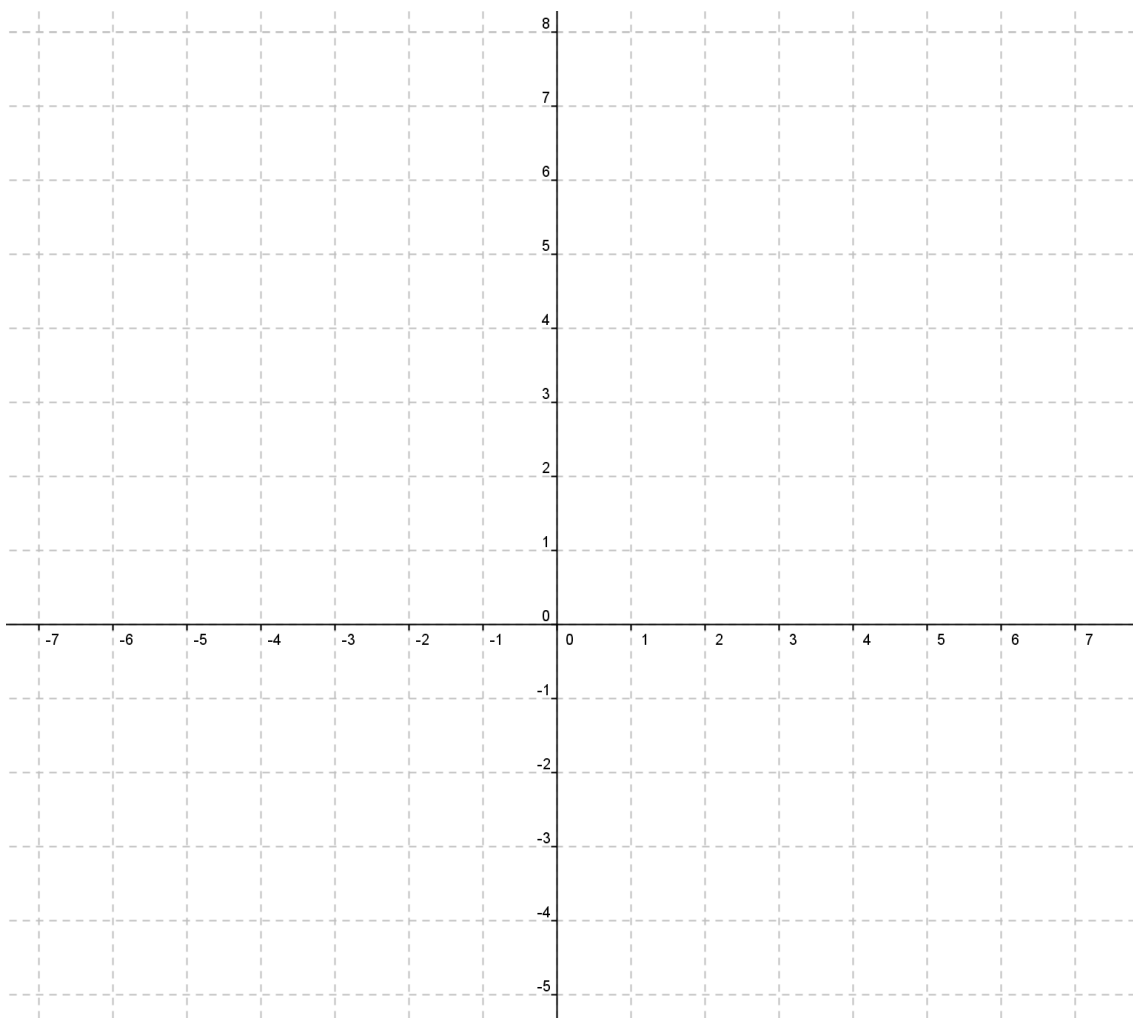
- a) El dominio de f es igual a _____
- b) El ámbito de f es igual a _____
- c) El conjunto solución de la inecuación $f(x) < 0$ corresponde a _____
- d) El conjunto solución de la inecuación $f(x) < -4$ corresponde a _____
- e) Un intervalo donde f es creciente corresponde a _____
- f) La cantidad de cortes con el eje X de la gráfica de f corresponde a _____
- g) La cantidad de preimágenes de 8 es igual a _____
- h) La preimagen de -4 es igual a _____
- i) Si $f(x) \in]-8, -4[$ entonces x pertenece al intervalo _____

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 11 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Si $x = 3$ es el eje de simetría y $(-1, 3)$ pertenece al gráfico de f , determine: (5 puntos)
 - a) Los valores de b y c .
 - b) Los cortes de la gráfica de f con el eje X.

2. Determine la ecuación de la recta perpendicular a $3y + 2x + 11 = 0$ y que pasa por el punto $(-5, -4)$. Grafique ambas rectas. Determine los puntos de intersección de cada recta con los ejes e indíquelos en la gráfica. (6 puntos)





Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM 2011

<http://matem.emate.ucr.ac.cr/>
tel. (506) 2511-4528

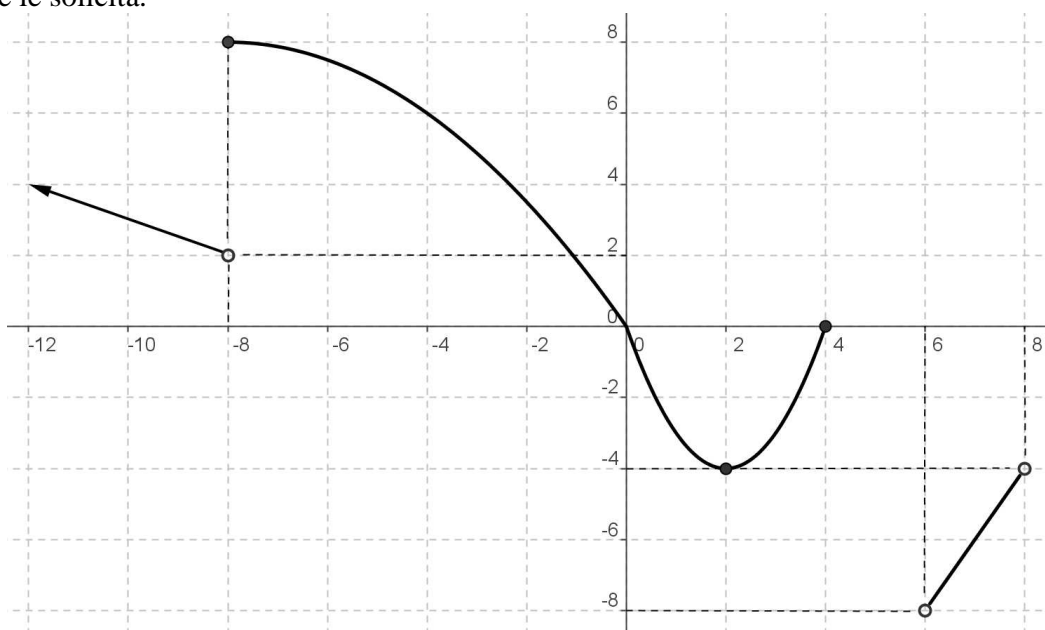


SOLUCIONARIO

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 18 de junio

SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 9 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



- a) El dominio de f es igual a $]-\infty, 4] \cup]6, 8[$
- b) El ámbito de f es igual a $]-8, +\infty[$
- c) El conjunto solución de la inecuación $f(x) < 0$ corresponde a $]0, 4[\cup]6, 8[$
- d) El conjunto solución de la inecuación $f(x) < -4$ corresponde a $]6, 8[$
- e) Un intervalo donde f es creciente corresponde a $]2, 4[$ o bien $]6, 8[$
- f) La cantidad de cortes con el eje X de la gráfica de f corresponde a 2
- g) La cantidad de preimágenes de 8 es igual a 2
- h) La preimagen de -4 es igual a 2
- i) Si $f(x) \in]-8, -4[$ entonces x pertenece al intervalo $]6, 8[$

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 11 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Si $x = 3$ es el eje de simetría y $(-1, 3)$ pertenece al gráfico de f , determine: (5 puntos)

- a) Los valores de b y c .

Solución:

Como el eje de simetría es $x = 3$ se tiene que $\frac{-b}{4} = 3 \Rightarrow b = -12$

Así $f(x) = 2x^2 - 12x + c$.

Como $(-1, 3)$ es un punto de la gráfica de la función se tiene que:

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 12 \cdot (-1) + c = 3$$

$$\Rightarrow 2 + 12 + c = 3$$

$$\Rightarrow c = -11$$

Respuesta: los valores de b y c son -12 y -11 respectivamente.

- b) Los cortes con el eje X de la gráfica de f .

Solución:

Por la parte a) se tiene que $f(x) = 2x^2 - 12x - 11$. Para determinar los cortes con el eje X basta resolver $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12x - 11 = 0$	$a = 2$	$\Delta = b^2 - 4ac$
	$b = -12$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-11)$
	$c = -11$	$\Delta = 232$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 + \sqrt{232}}{4} \text{ o } x = \frac{12 - \sqrt{232}}{4}$$

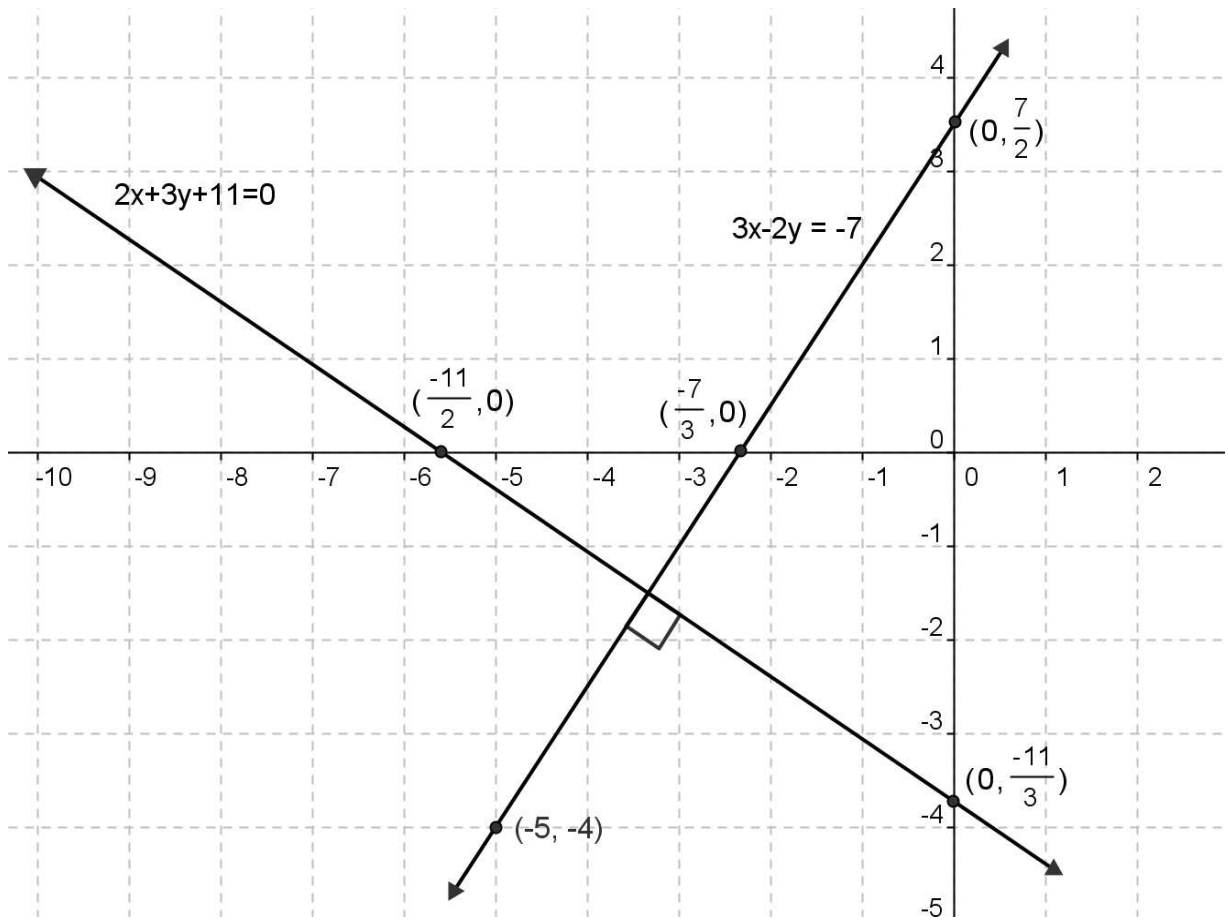
$$\Rightarrow x = \frac{12+2\sqrt{58}}{4} \text{ o } x = \frac{12-2\sqrt{58}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6+\sqrt{58}}{2} \text{ o } x = \frac{6-\sqrt{58}}{2}$$

Respuesta: los cortes con el eje X son $\left(\frac{6+\sqrt{58}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{6-\sqrt{58}}{2}, 0\right)$.

2. Determine la ecuación de la recta perpendicular a $3y + 2x + 11 = 0$ y que pasa por el punto $(-5, -4)$. Grafique ambas rectas. Determine los cortes con los ejes de ambas rectas e indíquelos en la gráfica. (6 puntos)

Recta dada	Recta buscada
$3y + 2x + 11 = 0$ $\Rightarrow y = \frac{-11 - 2x}{3}$ Entonces $m_1 = \frac{-2}{3}$ Cortes con los ejes: <u>Con eje X:</u> $\left(\frac{-11}{2}, 0\right)$ $\frac{-11 - 2x}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{-11}{2}$ <u>Con eje Y:</u> $\left(0, \frac{-11}{3}\right)$	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Tiene pendiente $m_2 = \frac{3}{2}$ porque las rectas son perpendiculares ($m_1 \cdot m_2 = -1$) ▪ Como pasa por $(-5, -4)$ se tiene que: $-4 = \frac{3}{2} \cdot -5 + b \Rightarrow b = \frac{7}{2}$ ▪ La ecuación de la recta buscada es $y = \frac{3x}{2} + \frac{7}{2}$ Cortes con los ejes: <u>Con eje X:</u> $\left(\frac{-7}{3}, 0\right)$ $\frac{3x}{2} + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3}$ <u>Con eje Y:</u> $\left(0, \frac{7}{2}\right)$



Selección única

1	B		8	D		15	B		22	A		29	A		36	B
2	D		9	D		16	C		23	D		30	B		37	C
3	D		10	C		17	C		24	A		31	A			
4	D		11	C		18	B		25	C		32	A			
5	D		12	C		19	A		26	A		33	B			
6	A		13	B		20	A		27	C		34	C			
7	C		14	C		21	B		28	A		35	A			