COLEGIO INTERNACIONAL SEK-CR

SOLUCIONARIO SIMULACRO 01-2016

⋆ Por: Prof. Álvaro Elizondo Montoya.⋆

1. (D) La ecuación de una circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r es: $\boxed{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2}$, determinemos primero las coordenadas del centro, para ello busquemos el punto medio entre los puntos $(0,-1)$ y $(0,7)$:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{7+-1}{2}\right) = (0,3)$$

El radio corresponde a la distancia del punto $(0,3)$ al punto $(0,7)$,es decir, el radio es 4.
Luego la ecuación de la circunferencia es

$$\begin{aligned} (x-0)^2+(y-3)^2 &= 4^2 \\ x^2+(y-3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

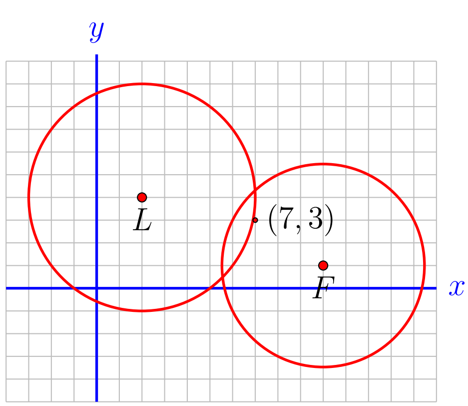
2. (D) Un punto (x_1, y_1) es un punto exterior a un círculo de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r si satisface: $\boxed{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)>r^2}$, interior si satisface $\boxed{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)<r^2}$ y un punto de la circunferencia si satisface $\boxed{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)=r^2}$. Así:

$$(-3)^2+(2-3)^2 = 9+1 = 10 < 16 \text{ luego } (-3,2) \text{ es un punto interior.}$$
$$(4)^2+(3-3)^2 = 16+0 = 16 = 16 \text{ luego } (4,3) \text{ es un punto de la circunferencia.}$$

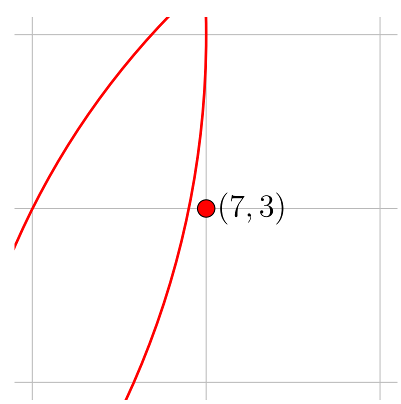
3. (D) Para poder recibir la señal, el punto $(7,3)$ debe estar en el interior o al menos en la circunferencia de la señal, es decir, un punto (x_1, y_1) debe satisfacer que: $\boxed{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)\leq r^2}$.
Veamos:

$$F: (7-10)^2+(3-1)^2 = 9+4 = 13 < 20 \text{ luego } (7,3) \text{ es un punto interior.}$$
$$L: (7-2)^2+(3-4)^2 = 25+1 = 26 > 25 \text{ luego } (7,3) \text{ es un punto exterior.}$$

Por lo tanto en el punto $(7,3)$ solo se recibe señal de F.
Para dar una referencia geométrica de la situación, observe la siguiente imagen:



Representación de las señales



Acercamiento de lo que ocurre en el punto $(7,3)$

4. (A) La ecuación de la circunferencia es:

$$\begin{aligned} (x-0)^2+(y-5)^2 &= 5^2 \\ \Rightarrow x^2+(y-5)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Para saber si $y=10$ corresponde a una recta tangente, resolvamos:

$$\begin{cases} x^2+(y-5)^2 = 25 \\ y=10 \end{cases}$$

Reealizando la sustitución:

$$\begin{aligned} x^2+(10-5)^2 &= 25 \\ x^2+25 &= 25 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

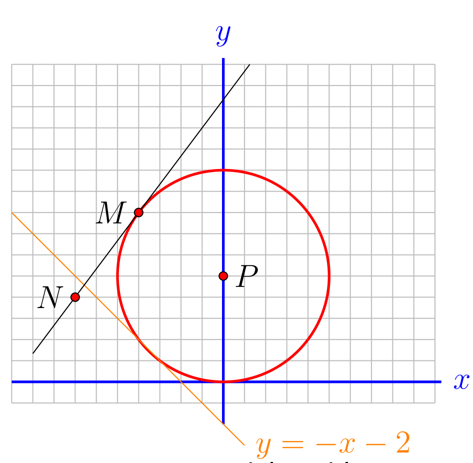
Dado que solo se halla una solución del sistema en el punto $(0,10)$, entonces la recta es tangente a la circunferencia, lo cuál es bastante evidente si se grafica la recta $y=10$ en la representación dada. Veamos ahora si la recta $y=-x-2$ es secante, para ello, la solución del siguiente sistema debe arrojar dos soluciones diferentes.

$$\begin{cases} x^2+(y-5)^2 = 25 \\ y=-x-2 \end{cases}$$

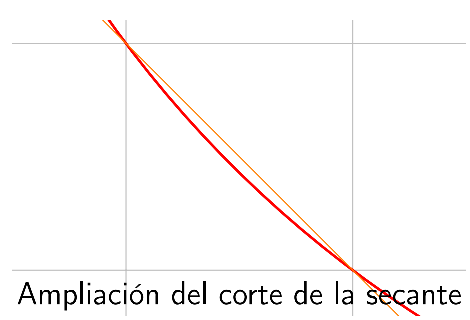
Realizando la sustitución:

$$\begin{aligned} x^2+(-x-2-5)^2 &= 25 \\ x^2+(-x-7)^2 &= 25 \\ x^2+(x+7)^2 &= 25 \\ x^2+x^2+14x+49 &= 25 \\ 2x^2+14x+24 &= 0 \\ x^2+7x+12 &= 0 \\ (x+4)(x+3) &= 0 \\ x=-4 \quad &, \quad x=-3 \end{aligned}$$

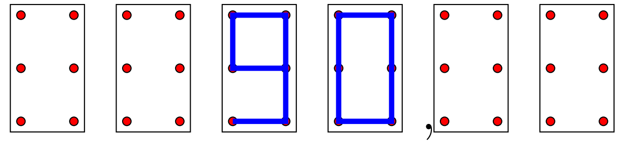
Dado que es posible hallar dos soluciones, la recta resulta ser secante.
Gráficamente se tiene:



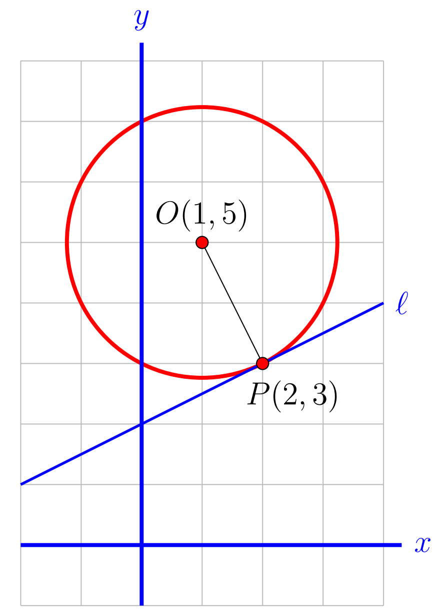
Representación del problema.


Ampliación del corte de la secante

5. $\angle PMN = 90°$, pues $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia y el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

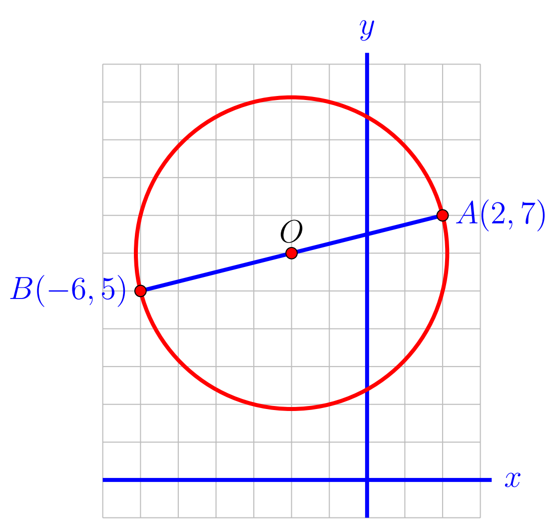
Respuesta: 

6. (B) Gráficamente, lo que se busca es la ecuación de la recta ℓ.



La pendiente del radio OP es: $m_{OP} = \dfrac{5-3}{1-2} = -2 \Rightarrow m_\ell = \dfrac{1}{2}$, luego, el valor de corte con el eje y es $b = y_1 - m_\ell x_1 = 3 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 2$. Por lo tanto: $\ell : y = \dfrac{1}{2}x + 2$

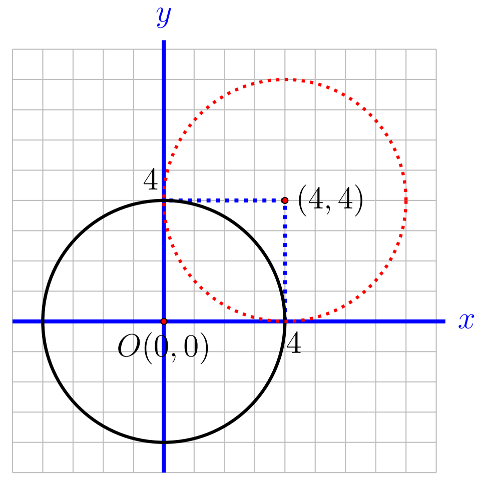
7. (D) Gráficamente:



Las coordenadas del punto O se pueden obtener aplicando la fórmula del punto medio, así:

$$O(x_m, y_m) = \left(\frac{2+-6}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = (-2, 6)$$

8. (B) Representando la situación:

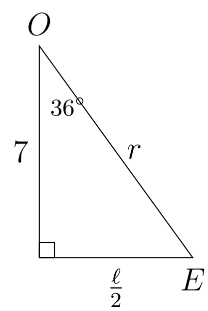


Claramente, la ecuación del nuevo círculo será: $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

9. (C)

$$m\angle\alpha = m\angle central = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

10. (B) Consideremos el triángulo formado por un radio, una apotema y la mitad de un lado.

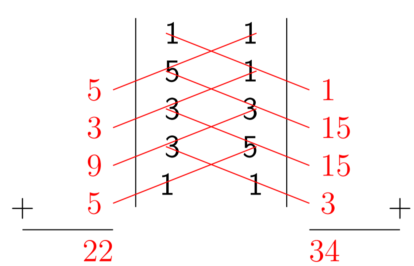


$$\begin{aligned} \cos(36^\circ) &= \frac{7}{r} \\ r &= \frac{7}{\cos(36^\circ)} \\ r &\approx 8{,}65 \end{aligned}$$

11. (D) Utilizando la respuesta del ejercicio anterior, se puede calcular:

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{r^2-7^2} \approx \sqrt{8{,}65^2-7^2} \approx 5{,}08 \Rightarrow \ell \approx 10{,}16 \Rightarrow p = 5\cdot\ell \approx 50{,}8$$

12. (B) Calculemos el área del polígono:

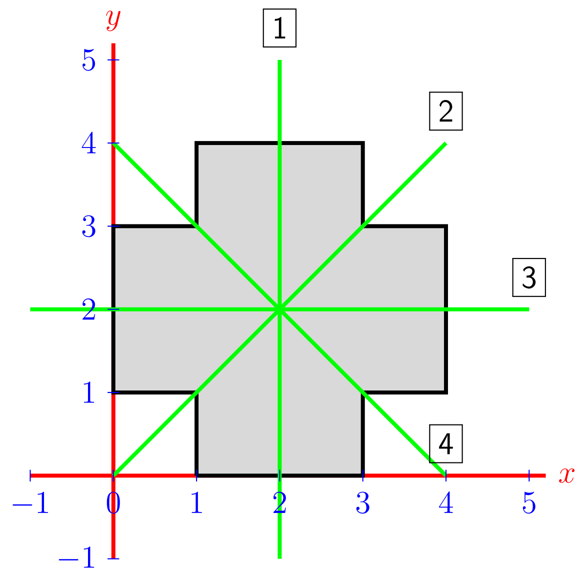


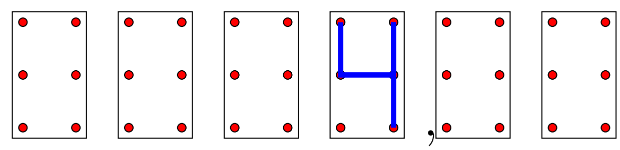
Luego $A = \frac{1}{2}(\text{Suma mayor} - \text{Suma menor}) = \frac{1}{2}(34-22) = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6\,u^2$.

13. (B) $A'(-2,5)$

14. (D) M

15. En la figura, se pueden trazar los siguientes ejes:



Respuesta: 

16. (D) $\overline{D'E'} = k \cdot \overline{DE} = 2 \cdot 22 = 44$

17. (B) Reflexión

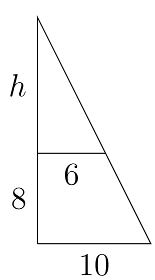
18. (B) B, pues hay una reducción de las dimensiones del polígono P.

19. (B) De la información: $PQ = 6\,cm$ además $PR = \frac{\text{diámetro}}{2} = \frac{24\,cm}{2} = 12\,cm$, aplicando el teorema de Pitágoras: $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}\,cm$

20. (C) De la información: $QR = 7\,cm$ además $PR = \frac{\text{diámetro}}{2} = \frac{30\,cm}{2} = 15\,cm$, aplicando el teorema de Pitágoras: $PQ = \sqrt{PR^2 - QR^2} = \sqrt{15^2 - 7^2} = 4\sqrt{11}\,cm$

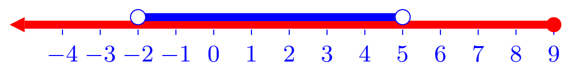
21. (B)

22. (C) Considere el siguiente triángulo:

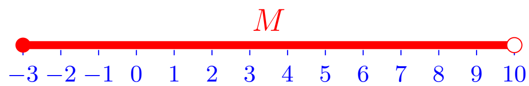


$$\begin{aligned} \frac{h}{6} &= \frac{h+8}{10} \\ 10h &= 6h + 48 \\ 4h &= 48 \\ h &= 12 \end{aligned}$$

23. (B) La intersección del conjunto A con el conjunto B, es aquél que contiene puntos de A y B simultáneamente.

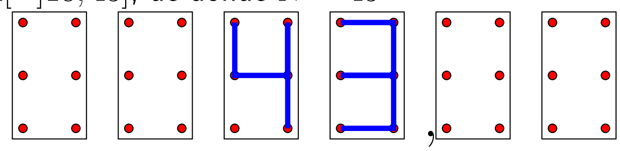


24. (A) Gráficamente:



Tanto I como II son verdaderas, pues 2 es un elemento de M y a su vez, $\{4\}$ es subconjunto de M.

25. Dado que $]13,34[\subset]18,43[$ entonces $]18,43]\cup]13,34[=]18,43]$, de donde $N=43$

Respuesta: 

26. (A) Nótese que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio, luego ambas relaciones representan funciones. De hecho, se observa fácilmente que $f(x)=x^2$ y que $g(x)=-x+1$ son los posibles criterios de estas funciones.

27. (D) $f(-3)=1-(-3)^2=1-9=-8$

28. (C) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2)=3(2)^2+6=3\cdot 4+6=12+6=18$

29. (D) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)=(3x-1)^2=9x^2-6x+1$

30. (C)

$$\begin{aligned}
L &= 2{,}89x+70{,}64\\
L-70{,}64 &= 2{,}89x\\
\frac{1}{2{,}89}L-\frac{70{,}64}{2{,}89} &= x\\
0{,}35L-24{,}44 &= x
\end{aligned}$$

31. (B) Sustituyendo x por 0, se tiene:

$$\begin{aligned}
3(0)-y &= -6\\
-y &= -6\\
y &= 6
\end{aligned}$$

La intersección ocurre en el punto $(0,6)$

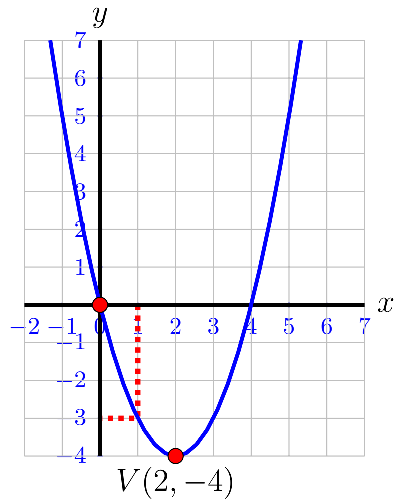
32. (A) Supongamos que interseca el eje X en el punto $(x_0,0)$, dado que pasa por los puntos $(0,4)$ y $(1,2)$, dado que la pendiente usando los puntos $(0,4)$ y $(1,2)$ es la misma que usando los puntos $(x_0,0)$ y $(1,2)$, entonces es válido afirmar que:

$$\frac{2-4}{1-0}=\frac{2-0}{1-x_0}$$

De donde:

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{2}{1-x_0} \\ -2+2x_0 &= 2 \\ 2x_0 &= 4 \\ x_0 &= 2 \end{aligned}$$

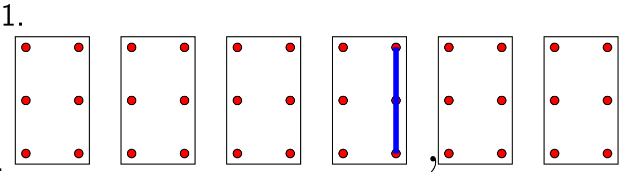
33. (C) Esbocemos una posible gráfica:



Es claro que necesariamente $f(1) < 0$

34. (B) La forma normal de la ecuación de la parábola es $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde $V(h,k)$ son las coordenadas del vértice. Dado que tiene vértice en el punto $(2,0)$, entonces, la forma es: $f(x) = a(x-2)^2 + 0 = a(x-2)^2$, sabemos también que $f(0) = 4$, entonces $a(0-2)^2 = 4 \Rightarrow a = 1$, así: $f(x) = 1(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

35. Como el eje de simetría corta el eje X en el punto $(-1,0)$ y este se halla a dos unidades del punto $(-3,0)$, el otro valor debe hallarse también a dos unidades del eje en la dirección contraria, es decir el otro punto de corte es $(1,0)$, luego valor de k es 1.

Respuesta: 

36. (B) El objeto toca el suelo cuando $h(t) = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \\ -4{,}9t^2 + 125\sqrt{2}t + 0{,}6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo con la calculadora, se obtiene: $t \approx -0{,}0034\,s$ y $t \approx 36{,}08\,s$, descartando el tiempo negativo se tiene que tarda aproximadamente $36{,}08\,s$ en caer.

37. (C) El objeto se halla en la posición máxima en el tiempo: $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-125\sqrt{2}}{2 \cdot -4{,}9} \approx 18{,}04\,s$ para determinar la altura, se calcula: $h(18{,}04)$, luego $h(18{,}04) = -4{,}9 \cdot (18{,}04)^2 + 125\sqrt{2} \cdot 18{,}04 + 0{,}6 \approx 1594{,}99\,m$

38. (C) Si Andrea tiene A revistas y Mariana tiene M revistas, entonces, la información sugiere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} M-1 & = & A+1 \\ M+1 & = & 2(A-1) \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} M-A & = & 2 \\ M-2A & = & -3 \end{array}\right.$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones se obtiene: $A=5$, luego $M=7$ y entonces: $A+M=12$

39. (B) Basta calcular: $L(2)=198-197\cdot e^{-0{,}23\cdot 2}\approx 73{,}57\,cm$

40. (B) Basta resolver: $C>800\,000$ Es decir:

$$\begin{array}{rcl} C & > & 800\,000 \\ 500\,000\,e^{0{,}08t} & > & 800\,000 \\ e^{0{,}08t} & > & 1{,}6 \\ 0{,}08t & > & ln(1{,}6) \\ t & > & 5{,}88 \end{array}$$

Luego se requiere como mínimo 6 años.

41. (C) Claramente, la forma de la gráfica es una parábola, luego $f(x)=ax^2+bx+c$, con $a\neq 0$

42. (A) La cantidad de mensajes se duplica con cada minuto que pasa, luego $y=2^x$, observe la siguiente tabla.

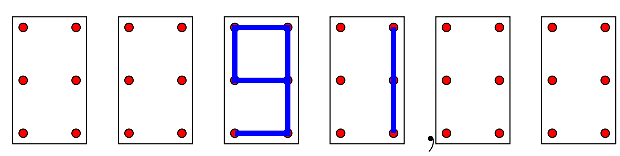
x(min)	0	1	2	3	4	5
y(cant.)	1	2	4	8	16	32

43. (D) Nótese que para $x=1$ el valor de la función es 0, esto solo lo satisface de entre las opciones la función $f(x)=\log_3(x)$

44. (A) Dado que el ingreso de Luis es directamente proporcional al número de libros vendidos, entonces el modelo que mejor se ajusta es un modelo lineal.

45. Basta calcular:

$$\overline{x}=\frac{93+90+95+85+92}{5}=91$$

Respuesta: 

46. (C) Basta calcular:

$$\overline{x}=\frac{95+95+80}{3}=90$$

47. (A) Dato de mayor frecuencia: 80

48. (A) Español obtuvo menor variabilidad relativa o menor coeficiente de variación, veamos la siguiente tabla:

Materia	Desviación estándar	Media	Variabilidad relativa
Matemática	7.4	78.3	$\frac{7,4}{78,3} \cdot 100 \approx 9{,}45$
Estudios Sociales	8.0	85.4	$\frac{8,0}{85,4} \cdot 100 \approx 9{,}36$
Español	8.3	92.1	$\frac{8,3}{92,1} \cdot 100 \approx 9{,}01$
Cívica	8.6	94.5	$\frac{8,6}{94,5} \cdot 100 \approx 9{,}10$

49. (B) Calculemos la posición relativa de cada nota obtenida por Lucía:

Materia	Nota	Posición relativa
Matemática	85.2	$\frac{85,2-78,3}{7,4} \approx 0{,}93$
Estudios Sociales	87.8	$\frac{87,8-85,4}{8} \approx 0{,}3$
Español	92	$\frac{92-92,1}{8,3} \approx -0{,}01$
Cívica	94.5	$\frac{94,5-94,5}{8,6} = 0$

50. (A) Se observa de la tabla anterior.

51. (A) J obtuvo mayor variabilidad relativa o menor coeficiente de variación, veamos la siguiente tabla:

Producto	Desviación estándar	Media	Variabilidad relativa
J	10	4	$\frac{4}{10} \cdot 100 = 40$
K	25	5	$\frac{5}{25} \cdot 100 = 20$
L	50	9	$\frac{9}{50} \cdot 100 = 18$
M	60	10	$\frac{10}{60} \cdot 100 \approx 16{,}67$

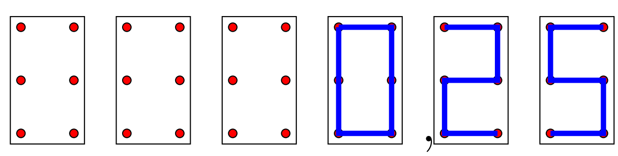
52. (D) Se observa de la tabla anterior.

53. (C) El coeficiente de variación para el producto K es:

$$C.V. = \frac{\text{Desviación estándar}}{\text{Media aritmética}} \cdot 100 = \frac{5}{25} \cdot 100 = 20,00$$

54. (C) $P(\text{mujer}) = \dfrac{570}{510+570} = \dfrac{570}{1080} \approx 0{,}53$

55. $P(\text{sétimo}) = \dfrac{120+150}{510+570} = \dfrac{270}{1080} = 0{,}25$

Respuesta: 

56. (B)

$$\begin{aligned}
P(\text{Hombre de octavo o mujer de décimo}) &= P(\text{Hombre de octavo}) + P(\text{Mujer de décimo}) - P(\text{Hombre de octavo y mujer de décimo}) \\
&= \frac{90}{510+570} + \frac{120}{510+570} - 0 \\
&= \frac{7}{36} \\
&\approx 0{,}19
\end{aligned}$$

57. (A)

   a) Edgar juega los números 5,15,25,...,95. en total son 10 números.
   b) Diego juega los números 75,76,77,...,99 en total son 25 números.

   Luego como Diego lleva más números tiene más probabilidad de acertar, la probabilidad de que acierte uno de los dos es $p = \dfrac{7+25}{100} = \dfrac{32}{100} = 0{,}32$

58. (C) La probabilidad de caer en la casilla de 2000 dólares es $p = \dfrac{1}{12} \approx 0{,}08$. Por otra parte como hay dos casillas con premio de 500 dólares y dos con premio de 300 dólares, luego es igualmente probable obtener cualquiera de los dos premios.

59. (A) $P(\text{no ejercicio y calificaciones} \geq 90) = \frac{48}{400} = 0{,}12$

60. (A)

   a) $P(\text{calificación} \geq 90 + \text{no ejercicio}) = \frac{48}{400} = 0{,}12$
   b) $P(\text{calificación} \geq 90 + \text{ejercicio}) = \frac{160}{400} = 0{,}40 > 3 \cdot 0{,}12 = 0{,}36$

   De a) y b) se deduce que I es verdadera.
   Luego, entre los estudiantes que no hacen ejercicio: $P(\text{calificación} \geq 90) = \frac{48}{200} = 0{,}24$

Profesor: Álvaro Elizondo Montoya